Numerical equivalence on Chow groups of local rings

AUTHOR(S):
蔵野, 和彦

代数幾何学シンポジウム記録
2003年度 pp.39-48

Numerical equivalence on Chow groups of local rings

蔵野 和彦 (明治大学理工学部)

この報告に書いてあることは、[6] に証明があります。もし興味を持っていただけたなら、詳しくはそれを見て下さいますようお願いします。

1 序

複素数体 $\mathbb{C}$ 上スムーズな射影曲面 X 上の二つの曲線 C_1, C_2 には、整数値の交点数 $(C_1.C_2)$ が定まる。これによって、X 上の二つのヴェイユ因子 D_1, D_2 に対して、整数値の交点数 $(D_1.D_2)$ が定まる。すると、pairing

(1) $$\mathrm{Div}(X) \times \mathrm{Div}(X) \to \mathbb{Z}$$

が定まり、これにより

(2) $$\mathrm{Pic}(X) \times \mathrm{Pic}(X) \to \mathbb{Z}$$

が誘導される。通常は、$\mathrm{Pic}(X)$ は、非常に巨大な群である。実際

$$0 \to \mathrm{Pic}^0(X) \to \mathrm{Pic}(X) \to NS(X) \to 0$$

という完全列があり、Néron-Severi 群 $NS(X)$ は有限生成アーベル群であるが、Picard 多様体 $\mathrm{Pic}^0(X)$ は $g(X)$ 次元のアーベル多様体である。この完全列により、X の種数 $g(X)$ が正であれば、$\mathrm{Pic}(X)_{\mathbb{Q}}$ は連続濃度の基底を持つ $\mathbb{Q}$-ベクトル空間であることがわかる。

ところで、$\overline{D_1} \in \mathrm{Pic}^0(X)$ を満たす $D_1 \in \mathrm{Div}(X)$ は、任意の $D_2 \in \mathrm{Div}(X)$ に対して $(D_1.D_2) = 0$ を満たすことが知られている。よって、主に交点数 $(D_1.D_2)$ に興味がある人は、この巨大な Picard 群 $\mathrm{Pic}(X)$ をまともに扱う必要は無く、(2) から誘導される有限次限 $\mathbb{Q}$-ベクトル空間 $NS(X)_{\mathbb{Q}}$ 上の pairing

$$NS(X)_{\mathbb{Q}} \times NS(X)_{\mathbb{Q}} \to \mathbb{Q}$$

を扱えば十分である。

任意の非負整数 n, m に対して、$n+m$ 次元のスムーズな複素射影代数多様体上の n 次元のサイクルと m 次元のサイクルとの交点数の pairing に対しても、上のような現象が起こる。(上の例は、$n = m = 1$ のものである。)

このような現象は、X のある一点 t で交わる二つの閉部分多様体 Y, Z の点 t での交点数 $i_X(Y, Z; t)$ を計算する際にも起こるのである。そのことを見ることが、ここでの目標である。つまり、上で説明した現象の局所環上での類似として、

- 点 t の局所環上で、(1), (2) のような pairing が定義される (下の (4) と (5))
- この pairing によって、numerical 同値が定義できる (下の定義 2.2)
- numerical 同値で割れば、$NS(X)$ のような有限生成な群ができる (下の定理 2.4)

をここで示したい。定理 2.4 によれば、各点の局所環上で $NS(X)$ のような有限生成アーベル群が定義できて、"局所的なピカール数"が定まることがわかる。

序章では、(1) に対応する局所環上での pairing (3) を定め、その幾何学的意味・交点理論との関連を見ることにする。正確な議論は、次章から始めることにする。

$S = \mathcal{O}_{X,t}$, $M = \mathcal{O}_{Y,t}$, $N = \mathcal{O}_{Z,t}$ とおく。M, N は S-加群である。X が正則スキームと仮定すると、S は正則局所環になる。このとき Serre [10] により、Y と Z の点 t での交点数は

$$i_X(Y, Z; t) = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \ell_S(\mathrm{Tor}_n^S(M, N))$$

と定義されている。ここで、Y と Z が t の近傍で一点で交わるための必要十分条件は $M \otimes_S N$ が、長さ有限であることである。こう仮定すると、加群 $\mathrm{Tor}_n^S(M, N)$ の長さ $\ell_S(\mathrm{Tor}_n^S(M, N))$ は有限であり、また $n >> 0$ に対して $\mathrm{Tor}_n^S(M, N) = 0$ であるので、上の Tor の交代和は整数値を取ることがわかる。

$$\mathbb{G}. \ : \ \ 0 \to G_m \to G_{m-1} \to \cdots \to G_0 \to 0$$

を M の有限自由分解としよう。このとき、$\mathrm{Tor}_n^S(M, N) = \mathrm{H}_n(\mathbb{G}. \otimes_S N)$ である。I は S のイデアルで、$IN = 0$ かつ $\ell_S(M/IM) < \infty$ を満たすものとしよう。($M \otimes_S N$ は長さ有限であるので、例えば、$I = \mathrm{ann}_S N$ とおけばこれを満たす。) すると、N は S/I-加群であり、

$$\mathbb{G}. \otimes_S N = \mathbb{G}. \otimes_S (S/I \otimes_S N) = (\mathbb{G}. \otimes_S S/I) \otimes_{S/I} N$$

である。ここで、$R = S/I$ とおくと、$\mathbb{F}. = \mathbb{G}. \otimes_S R$ は R 上の有界な有限自由複体である。また、$\ell_S(M/IM) < \infty$ であるから、$\mathbb{F}.$ の全てのホモロジーの長さは有限になる。よって、任意の R-加群 N に対して $\mathbb{F}. \otimes_R N$ のホモロジーの長さは有限であり、

$$i_X(Y, Z; t) = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \ell_S(\mathrm{Tor}_n^S(M, N)) = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \ell_R(\mathrm{H}_n(\mathbb{F}. \otimes_R N))$$

である。次章以降で、(1) に対応する局所環上の pairing として、

$$(3) \qquad (\mathbb{F}., \ N) \mapsto \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n \ell_R(\mathrm{H}_n(\mathbb{F}. \otimes_R N))$$

を考えたい。

上の議論でわかったことは、**「ネーター局所環 R 上で (たとえ S が正則局所環としても、$R = S/I$ は正則とは仮定できないことに注意)、全てのホモロジーが長さ有限である R-加群の有界な有限自由複体 $\mathbb{F}.$ と R-加群 N に対して定まる (3) の pairing は、交点数 $i_X(Y, Z; t)$ の計算と深い関係がある」**ということである。

次章以下で詳しく述べるが、上の pairing (正確には、(4) と (5)) を使って、複体のグロタンディエク群や有限生成 R-加群のグロタンディエク群、チャウ群に numerical 同値を導入することができる (定義 2.2 参照)。主定理 (定理 2.4) は、これらを numerical 同値で割ると、同じ階数の有限生成自由アーベル群になるということを主張している。

以下の章で、正確な定義・主定理・具体例・代数幾何の numerical 同値との関係を述べる。

2 定義と主定理

このノートで出てくる局所環はすべて正則局所環の像であるとする。$\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{C}$ はそれぞれ整数環、有理数体、複素数体とする。

$(R, \mathfrak{m})$ は、d 次元ネーター局所環としよう。$C^{\mathfrak{m}}(R)$ は、有限生成 R-自由加群の有界な複体ですべてのホモロジー群が長さ有限であるものからなるカテゴリーとする。(もちろん、複体のバウンダリー射は R-線型写像であり、複体の間の射は R-線型写像のチェインマップと仮定する。)

例 2.1 $\mathbb{K}.$ は、局所環 R のパラメーター系 $\underline{a}$ に関するコスズル複体であるとする。このとき、$\mathbb{K}. \in C^{\mathfrak{m}}(R)$ であることがわかる。実際、有限生成 R-加群 M に対して、

$$\sum_{n \geq 0} (-1)^n \ell_R(\mathrm{H}_n(\mathbb{K}. \otimes_R M))$$

は、M の $(\underline{a})$ に関する重複度と一致する *[10]*。

$\mathbb{K}.$ は、$C^{\mathfrak{m}}(R)$ の中ではかなり性質のよい複体である。$C^{\mathfrak{m}}(R)$ の中にはもっと悪い *(?)* 性質を持つものがたくさんある *[6]*。

$\mathcal{M}(R)$ は有限生成 R-加群と R-線型写像のカテゴリーとする。このとき、$\mathbb{F}. \in C^{\mathfrak{m}}(R)$ と $N \in \mathcal{M}(R)$ に対して、

$$\chi_{\mathbb{F}.}(N) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n \ell_R(\mathrm{H}_n(\mathbb{F}. \otimes_R N)) \in \mathbb{Z}$$

を考えたい。ここで、$\mathbb{F}. \in C^{\mathfrak{m}}(R)$ であるので、$\ell_R(\mathrm{H}_n(\mathbb{F}. \otimes_R N))$ は有限な数であることに注意。

有限生成 R-加群のグロタンディエク群 $\mathrm{G}_0(R)$ を次のように定義する。

$$\mathrm{G}_0(R) = \bigoplus_{M \in \mathcal{M}(R)} \mathbb{Z} \cdot [M] \Big/ Q$$

ここで、Q は次の集合で生成された部分群とする。

$$\{[M] - [L] - [N] \mid 0 \to L \to M \to N \to 0 \text{ は } \mathcal{M}(R) \text{の中の完全列}\}$$

$[M]$ は有限生成 R-加群 M を含む同型類に対応した生成元とする。

次に、複体のグロタンディェク群 $\mathrm{K}_0^{\mathfrak{m}}(R)$ を次のように定義する。

$$\mathrm{K}_0^{\mathfrak{m}}(R) = \bigoplus_{\mathbb{F}.\in C^{\mathfrak{m}}(R)} \mathbb{Z}\cdot[\mathbb{F}.] \Big/ P$$

ただし、$[\mathbb{F}.]$ はカテゴリー $C^{\mathfrak{m}}(R)$ に含まれる複体

$$\mathbb{F}.\ :\ \cdots \to F_n \to F_{n-1} \to \cdots$$

の同型類に対応した生成元であるとする。ここで、P は次の二つの集合で生成された部分群であるとする。

$$\{[\mathbb{G}.] - [\mathbb{F}.] - [\mathbb{H}.] \mid\ 0 \to \mathbb{F}. \to \mathbb{G}. \to \mathbb{H}. \to 0 \text{ は } C^{\mathfrak{m}}(R) \text{ の中の完全列}\}$$
$$\{[\mathbb{F}.] - [\mathbb{G}.] \mid \mathbb{F}. \to \mathbb{G}. \text{ は } C^{\mathfrak{m}}(R) \text{ 内の射で quasi-isomorphism}\}$$

$\mathcal{M}(R)$ の完全列 $0 \to L \to M \to N \to 0$ があれば、任意の $\mathbb{F}. \in C^{\mathfrak{m}}(R)$ に対して $\chi_{\mathbb{F}.}(M) = \chi_{\mathbb{F}.}(L) + \chi_{\mathbb{F}.}(N)$ が成立する。また、$C^{\mathfrak{m}}(R)$ 内の完全列 $0 \to \mathbb{F}. \to \mathbb{G}. \to \mathbb{H}. \to 0$ があれば、任意の $M \in \mathcal{M}(R)$ に対して $\chi_{\mathbb{G}.}(M) = \chi_{\mathbb{F}.}(M) + \chi_{\mathbb{H}.}(M)$ が成立する。$C^{\mathfrak{m}}(R)$ 内の quasi-isomorphism $\mathbb{F}. \to \mathbb{G}.$ があれば、任意の $M \in \mathcal{M}(R)$ に対して $\chi_{\mathbb{F}.}(M) = \chi_{\mathbb{G}.}(M)$ が成立する。よって、$e([\mathbb{F}.] \otimes [M]) = \chi_{\mathbb{F}.}(M)$ と定めることにより、

(4)
$$e : \mathrm{K}_0^{\mathfrak{m}}(R) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{G}_0(R) \longrightarrow \mathbb{Z}$$

が誘導される。

また、アフィン・スキーム $\mathrm{Spec}(R)$ に対して、そのチャウ群 $\mathrm{A}_*(R) = \oplus_{i=0}^{d} \mathrm{A}_i(R)$ を

$$\mathrm{A}_i(R) = \bigoplus \mathbb{Z}\cdot[\mathrm{Spec}(R/\mathfrak{p})] \Big/ \mathrm{Rat}_i(R),$$

によって定義する。ただし、上の直和は $\dim R/\mathfrak{p} = i$ を満たす R のすべての素イデアル $\mathfrak{p}$ に対して和をとったものである。$[\mathrm{Spec}(R/\mathfrak{p})]$ は素イデアル $\mathfrak{p}$ に対応する生成元であり、$\mathrm{Rat}_i(R)$ は有理同値によって生成された部分群とする ([1] の Chapter 1 参照)。

$\mathbb{F}. \in C^{\mathfrak{m}}(R)$ に対して、

$$\mathrm{ch}(\mathbb{F}.) : \mathrm{A}_*(R) \to \mathrm{A}_*(R/\mathfrak{m})_{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q}\cdot[\mathrm{Spec}(R/\mathfrak{m})] = \mathbb{Q}$$

は、複体 $\mathbb{F}. \in C^{\mathfrak{m}}(R)$ のローカライズド・チャーン・キャラクターとする。このとき、$v([\mathbb{F}.] \otimes \gamma) = \mathrm{ch}(\mathbb{F}.)(\gamma)$ と定めることにより、pairing

(5)
$$v : \mathrm{K}_0^{\mathfrak{m}}(R) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{A}_*(R) \longrightarrow \mathbb{Q}$$

が得られる。この v と e が、(2) の役割を果たす局所環上での pairing である。

ここで、局所環上での numerical 同値を次のように定義する。

定義 2.2 次によって定義された部分群の各元を、0 に numerical 同値ということにする。

$$\begin{aligned} \mathrm{N}\,\mathrm{K}_0^{\mathrm{m}}(R) &= \{\alpha \in \mathrm{K}_0^{\mathrm{m}}(R) \mid e(\alpha \otimes \beta) = 0 \text{ for any } \beta \in \mathrm{G}_0(R)\} \\ \mathrm{N}\,\mathrm{G}_0(R) &= \{\beta \in \mathrm{G}_0(R) \mid e(\alpha \otimes \beta) = 0 \text{ for any } \alpha \in \mathrm{K}_0^{\mathrm{m}}(R)\} \\ \mathrm{N}\,\mathrm{A}_i(R) &= \{\gamma \in \mathrm{A}_i(R) \mid v(\alpha \otimes \gamma) = 0 \text{ for any } \alpha \in \mathrm{K}_0^{\mathrm{m}}(R)\} \end{aligned}$$

ただし $i = 0, \ldots, d$。

numerical 同値で割った群を

$$\begin{aligned} \overline{\mathrm{K}_0^{\mathrm{m}}(R)} &= \mathrm{K}_0^{\mathrm{m}}(R)/\,\mathrm{N}\,\mathrm{K}_0^{\mathrm{m}}(R) \\ \overline{\mathrm{G}_0(R)} &= \mathrm{G}_0(R)/\,\mathrm{N}\,\mathrm{G}_0(R) \\ \overline{\mathrm{A}_i(R)} &= \mathrm{A}_i(R)/\,\mathrm{N}\,\mathrm{A}_i(R) \end{aligned}$$

とおく。ただし $i = 0, \ldots, d$。

定義より直ちに、e は $\overline{e}(\overline{\alpha} \otimes \overline{\beta}) = e(\alpha \otimes \beta)$ を満たす写像

$$\overline{e} : \overline{\mathrm{K}_0^{\mathrm{m}}(R)} \otimes \overline{\mathrm{G}_0(R)} \longrightarrow \mathbb{Z}$$

を誘導する。ただし、$\overline{\alpha}, \overline{\beta}$ は、それぞれ α, β の像であるとする。同様に、v は $\overline{v}(\overline{\alpha} \otimes \overline{\gamma}) = v(\alpha \otimes \gamma)$ を満たす写像

$$\overline{v} : \overline{\mathrm{K}_0^{\mathrm{m}}(R)} \otimes \overline{\mathrm{A}_*(R)} \longrightarrow \mathbb{Q}$$

を誘導する。

R は正則局所環 S の像であると仮定する。すると、$\mathrm{Spec}(S)$ を base regular scheme と考えて特異リーマン・ロッホ公式 ([1] の 18.2 と 20.1 参照) を使うと、$\mathbb{Q}$-ベクトル空間の同型

$$\tau_{R/S} : \mathrm{G}_0(R)_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \mathrm{A}_*(R)_{\mathbb{Q}}$$

が存在する。(この写像は、R だけでなく S を用いて構成されるので、$\tau_{R/S}$ と書くことにする。) このとき、任意の $\mathbb{F}. \in C^{\mathrm{m}}(R)$ に対して図式

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{G}_0(R)_{\mathbb{Q}} & \xrightarrow{\tau_{R/S}} & \mathrm{A}_*(R)_{\mathbb{Q}} \\ {\scriptstyle \chi_{\mathbb{F}.}} \downarrow & & {\scriptstyle \mathrm{ch}(\mathbb{F}.)} \downarrow \\ \mathbb{Q} & = & \mathbb{Q} \end{array}$$

は可換である ([1] の Example 18.3.12) ので、

$$\mathrm{N}\,\mathrm{K}_0^{\mathrm{m}}(R) = \{\alpha \in \mathrm{K}_0^{\mathrm{m}}(R) \mid v(\alpha \otimes \gamma) = 0 \text{ for any } \gamma \in \mathrm{A}_*(R)\}$$

としてもよい。(ここで、アーベル群 A に対して、$A_{\mathbb{Q}} = A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ とおく。)

次の命題により、$\overline{\mathrm{G}_0(R)}_{\mathbb{Q}}$ と $\oplus_i \overline{\mathrm{A}_i(R)}_{\mathbb{Q}}$ との同型 $\overline{\tau_{R/S}}$ が構成できる。

命題 2.3 以上の状況で、

$$\tau_{R/S}(\mathrm{N}\,\mathrm{G}_0(R)_{\mathbb{Q}}) = \bigoplus_{i=0}^{d} \mathrm{N}\,\mathrm{A}_i(R)_{\mathbb{Q}}$$

が成立する。

証明のキーは、Gillet-Soulé による Adams 作用素 [2] とローカライズド・チャーン・キャラクターとの関係を与えるある公式 [7] を使うことである。詳しくは [6] 参照。

$\overline{\mathrm{A}_*(R)}_{\mathbb{Q}} = \oplus_i \overline{\mathrm{A}_i(R)}_{\mathbb{Q}}$ と定義する。すると、前命題により図式

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{G}_0(R)_{\mathbb{Q}} & \xrightarrow{\tau_{R/S}} & \mathrm{A}_*(R)_{\mathbb{Q}} & & \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ \overline{\mathrm{G}_0(R)}_{\mathbb{Q}} & \xrightarrow{\overline{\tau_{R/S}}} & \overline{\mathrm{A}_*(R)}_{\mathbb{Q}} & = & \oplus_{i=0}^{d}\overline{\mathrm{A}_i(R)}_{\mathbb{Q}} \end{array} \tag{6}$$

を可換にする写像 $\overline{\tau_{R/S}}$ が誘導される。

写像 $\tau_{R/S}$ は R だけでなく S を用いて定義される。(しかし、実際に写像 $\tau_{R/S}$ が S のとり方に依る例は知られていない。) ところが、ここの写像 $\overline{\tau_{R/S}}$ は S のとり方には依らないことが証明される [6]。

次が主定理である。

定理 2.4 $(R, \mathfrak{m})$ はエクセレント・ネーター局所環で次のどちらかをみたすとする。*(i)* R は $\mathbb{Q}$ を含む。*(ii)* R は、体、整数環 $\mathbb{Z}$ または完備離散付値環上本質的有限型。

このとき、$\overline{\mathrm{K}_0^{\mathfrak{m}}(R)}$, $\overline{\mathrm{G}_0(R)}$, $\overline{\mathrm{A}_*(R)}$ は、同じ階数の有限生成自由アーベル群である。

次章で主定理の証明の概略を述べる。

3 主定理の証明の概略

簡単な議論により、

$$\dim \overline{\mathrm{K}_0^{\mathfrak{m}}(R)}_{\mathbb{Q}} = \dim \overline{\mathrm{G}_0(R)}_{\mathbb{Q}} = \dim \overline{\mathrm{A}_*(R)}_{\mathbb{Q}} < \infty$$

が証明できれば定理 2.4 が従うことがわかる。

よって、以下では、すべて $\mathbb{Q}$ 上で考えることにする。

図式 (6) の射 $\overline{\tau_{R/S}}$ は同型であるので、$\dim \overline{\mathrm{G}_0(R)}_{\mathbb{Q}} = \dim \overline{\mathrm{A}_*(R)}_{\mathbb{Q}}$ が成立する。また pairing $\overline{e} : \overline{\mathrm{K}_0^{\mathfrak{m}}(R)}_{\mathbb{Q}} \otimes \overline{\mathrm{G}_0(R)}_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \mathbb{Q}$ は perfect であるので、もし $\dim \overline{\mathrm{G}_0(R)}_{\mathbb{Q}} < \infty$ であれば $\dim \overline{\mathrm{K}_0^{\mathfrak{m}}(R)}_{\mathbb{Q}} = \dim \overline{\mathrm{G}_0(R)}_{\mathbb{Q}}$ が直ちに従う。

よって、定理を証明するには $\dim \overline{\mathrm{A}_*(R)}_{\mathbb{Q}} < \infty$ を示せば十分である。

それを示すために、まず R が整域の場合に帰着させる。(これは、局所環の射が proper 射になるときに、誘導されるチャウ群の射の様子を見ることにより可能になる。)

以下、R は整域であるとしよう。定理の仮定により、射影的な正則オルタレーション $\pi : Z \to \mathrm{Spec}(R)$ が存在する (広中 [3] と de Jong [4] 参照)。つまり、π は generically finite

な projective surjection で Z は正則スキームである。さらに、$\pi^{-1}(\mathfrak{m})_{\mathrm{red}}$ は simple normal crossing divisor と仮定してよい。

$$\pi^{-1}(\mathfrak{m})_{\mathrm{red}} = E_1 \cup \cdots \cup E_t$$

を既約分解としよう。仮定により、各 E_l は $R/\mathfrak{m}$ 上の正則な射影多様体であり、$\mathrm{codim}_Z E_l = 1$ $(l = 1, \cdots, t)$ である。

$\mathrm{CH}^{\cdot}_{\mathrm{num}}(E_l)_{\mathbb{Q}}$ は、E_l の numerical 同値で割った有理係数のチャウ環 ([1] の Chapter 19 参照) とする。このとき、[1] の Example 19.1.4 により、すべての l に対して $\dim \mathrm{CH}^{\cdot}_{\mathrm{num}}(E_l)_{\mathbb{Q}}$ は有限次限 $\mathbb{Q}$-ベクトル空間になる。

よって、次を証明することにより、主定理は証明される。

主張 3.1 ここで、$\overline{\mathrm{A}_*(R)}_{\mathbb{Q}}$ は $\oplus_{l=1}^{t} \mathrm{CH}^{\cdot}_{\mathrm{num}}(E_l)_{\mathbb{Q}}$ の *subquotient* である。

以下、簡単に証明のアウトラインを述べる。

$\pi_* : \mathrm{A}_*(Z)_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{A}_*(R)_{\mathbb{Q}}$ は全射であるので、$\mathbb{Q}$-ベクトル空間の射 $s : \mathrm{A}_*(R)_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{A}_*(Z)_{\mathbb{Q}}$ で $\pi_* \cdot s = 1$ を満たすものがある。

$j_l : E_l \to Z$ は、閉じた埋め込みとする $(l = 1, \cdots, t)$。次の合成射を φ とおく。

$$\mathrm{A}_*(R)_{\mathbb{Q}} \xrightarrow{s} \mathrm{A}_*(Z)_{\mathbb{Q}} \xrightarrow{\sum j_l^*} \oplus_l \mathrm{A}_*(E_l)_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \oplus_l \mathrm{CH}^{\cdot}_{\mathrm{num}}(E_l)_{\mathbb{Q}}$$

上の最後の射は自然な射影、j_l^* は Cartier divisor E_l との intersection をとる射 (Chapter 2 [1]) とする。

主張 3.1 を示すには、φ の核が、$\oplus_i \mathrm{N}\,\mathrm{A}_i(R)_{\mathbb{Q}}$ に含まれていることを示せばよい。$\gamma \in \mathrm{A}_*(R)_{\mathbb{Q}}$ が $\varphi(\gamma) = 0$ を満たすとする。このときに、任意の $\mathbb{F}. \in C^{\mathfrak{m}}(R)$ に対して、$\mathrm{ch}(\mathbb{F}.)(\gamma) = 0$ を示したい。$\varphi(\gamma) = 0$ であれば、$l = 1, \ldots, t$ に対して

$$j_l^* \cdot s(\gamma) = 0 \quad \text{in } \mathrm{CH}^{\cdot}_{\mathrm{num}}(E_l)_{\mathbb{Q}}$$

が成立する。このことを使って $\gamma \in \oplus_i \mathrm{N}\,\mathrm{A}_i(R)_{\mathbb{Q}}$ を示すのである。詳しくは、[6] 参照。

q.e.d.

$\dim \overline{\mathrm{G}_0(R)}_{\mathbb{Q}}$ について、基本的な事実を以下に列挙する。

1) $\mathbb{K}.$ は、局所環 R のパラメーター系 $\underline{a}$ に関するコスズル複体であるとする。このとき、$\chi_{\mathbb{K}.}(R) = e(\underline{a}, R) > 0$ であるので、$[R] \notin \mathrm{N}\,\mathrm{G}_0(R)_{\mathbb{Q}}$ である。よって、$\dim \overline{\mathrm{G}_0(R)}_{\mathbb{Q}} > 0$ である。

2) R は、正則局所環であるとする。このとき、$\mathrm{G}_0(R)_{\mathbb{Q}} = \overline{\mathrm{G}_0(R)}_{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q}$ である。

3) 非常に多くの場合、$\dim \mathrm{G}_0(R)_{\mathbb{Q}} = \infty$ である。定理 2.4 により $\dim \overline{\mathrm{G}_0(R)}_{\mathbb{Q}} < \infty$ であるので、この場合 $\mathrm{N}\,\mathrm{G}_0(R)_{\mathbb{Q}} \neq 0$ となっている。

   X は、$\mathbb{C}$ 上スムーズな射影多様体であるとする。R は、X のアフィン・コーンの原点での局所環であるとする。このとき、$\dim \mathrm{G}_0(R)_{\mathbb{Q}} \geq \dim \mathrm{Pic}(X)_{\mathbb{Q}}$ が示される [5]。X の種数が正であれば、$\dim \mathrm{Pic}(X)_{\mathbb{Q}} = \infty$ であることに注意。よって、X の種数が正であれば、$\dim \mathrm{G}_0(R)_{\mathbb{Q}} = \infty$ となる。

4) X は、n 次元射影空間 $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ の互いに異なる r 点での blow-up であるとする。ここで、$n \geq 2$ であると仮定する。R を、X のあるアフィン・コーンの原点での局所環であるとする。このとき、$\mathrm{G}_0(R)_{\mathbf{Q}} = \overline{\mathrm{G}_0(R)}_{\mathbf{Q}} = \mathbb{Q}^{r+1}$ である [6]。よって、R の次元 $n+1$ (≥ 3) を固定しても、$\dim \overline{\mathrm{G}_0(R)}_{\mathbf{Q}}$ には上限が無いことがわかる。

5) R が、2 次元以下の局所整域であるとする。このとき、Roberts の定理 [8] により $\overline{\mathrm{G}_0(R)}_{\mathbf{Q}} = \mathbb{Q}$ であることが示される [6]。

4 代数幾何の numerical 同値との関係

この章では、体上スムーズな射影多様体のアフィン・コーンを扱う。Roberts-Srinivas [9] の手法と結果を使いながら、局所環の numerical 同値で割ったチャウ群の様子を調べる。

k は代数閉体とし、$A = \oplus_{n\geq 0} A_n$ はネーター次数環で $A_0 = k$, $A = k[A_1]$ を満たすものとする。$X = \mathrm{Proj}(A)$ は k 上スムーズであると仮定しよう。$A_+ = \oplus_{n>0} A_n$, $R = A_{A_+}$, $\mathfrak{m} = A_+ R$ とおく。$\pi : Z \to \mathrm{Spec}(R)$ は $\mathfrak{m}$ でのブロー・アップとする。このとき、$\pi^{-1}(\mathfrak{m})$ は自然に X と一致する。よって、X は Z の閉部分スキームと思える。h は埋め込み $X = \mathrm{Proj}(A)$ に対応した X 上の very ample divisor とする。

Thomason-Trobaugh [11] の localization sequences を用いて、

$$\mathrm{K}_0^{\mathfrak{m}}(R)_{\mathbf{Q}} \xrightarrow{\varphi} \mathrm{CH}^{\cdot}(X)_{\mathbf{Q}} \xrightarrow{h} \mathrm{CH}^{\cdot}(X)_{\mathbf{Q}} \tag{7}$$

は、完全列であることが証明できる。を得る。ここで、φ は、次の合成射である。

$$\mathrm{K}_0^{\mathfrak{m}}(R)_{\mathbf{Q}} \xrightarrow{\pi^*} \mathrm{K}_0^{X}(Z)_{\mathbf{Q}} \xrightarrow{\chi} \mathrm{G}_0(X)_{\mathbf{Q}} \xrightarrow{\tau_{X/Z}} \mathrm{CH}^{\cdot}(X)_{\mathbf{Q}}$$

ただし、π^* は [2] の 1.5 で定義されている射、χ はホモロジーの交代和をとる射、$\tau_{X/Z}$ は正則スキーム Z を base regular scheme とした X のリーマン・ロッホ写像 ([1] の 18.2 と 20.1 参照) である。

ここで、

$$\begin{aligned} K &= \mathrm{Ker}(\mathrm{CH}^{\cdot}(X)_{\mathbf{Q}} \xrightarrow{h} \mathrm{CH}^{\cdot}(X)_{\mathbf{Q}}) \\ L &= \mathrm{Ker}(\mathrm{CH}^{\cdot}_{\mathrm{num}}(X)_{\mathbf{Q}} \xrightarrow{h} \mathrm{CH}^{\cdot}_{\mathrm{num}}(X)_{\mathbf{Q}}) \\ M &= \mathrm{CH}^{\cdot}_{\mathrm{num}}(X)_{\mathbf{Q}} / h \cdot \mathrm{CH}^{\cdot}_{\mathrm{num}}(X)_{\mathbf{Q}} \end{aligned}$$

とおく。ただし、$\mathrm{CH}^{\cdot}_{\mathrm{num}}(X)_{\mathbf{Q}}$ は numerical 同値で割った X の有理係数のチャウ環とする。このとき、次の可換図式がある。

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{K}_0^{\mathfrak{m}}(R)_{\mathbf{Q}} \arrow[d, "\varphi"'] & & & & \\ 0 \arrow[r] & K \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{CH}^{\cdot}(X)_{\mathbf{Q}} \arrow[r, "h"] \arrow[d] & \mathrm{CH}^{\cdot}(X)_{\mathbf{Q}} \arrow[r, "\xi"] \arrow[d] & \mathrm{A}_*(R)_{\mathbf{Q}} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & L \arrow[r] & \mathrm{CH}^{\cdot}_{\mathrm{num}}(X)_{\mathbf{Q}} \arrow[r, "h"] & \mathrm{CH}^{\cdot}_{\mathrm{num}}(X)_{\mathbf{Q}} \arrow[r] & M \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

上の図式は、横には完全列である (例えば、[5] 参照)。ξ は A の斉次素イデアル P (ただし、$P \neq A_+$) に対して $\xi([\mathrm{Proj}(A/P)]) = [\mathrm{Spec}(R/PR)]$ によって定まる写像である。(7) の完全性により、$\varphi : \mathrm{K}_0^{\mathrm{m}}(R)_{\mathbf{Q}} \to K$ は全射である。写像 $K \to L$ の像を W とおく。これから自然に誘導される全射 $\phi : \mathrm{K}_0^{\mathrm{m}}(R)_{\mathbf{Q}} \to W$ を見よう。Roberts-Srinivas [9] で行われている議論によって、次のことが証明できる。

1) $W = \overline{\mathrm{K}_0^{\mathrm{m}}(R)_{\mathbf{Q}}}$ が成立する。すなわち、$0 \to \mathrm{N}\,\mathrm{K}_0^{\mathrm{m}}(R)_{\mathbf{Q}} \to \mathrm{K}_0^{\mathrm{m}}(R)_{\mathbf{Q}} \xrightarrow{\phi} W \to 0$ は完全である。

2) 次の図式を可換にする写像 $\bar{\xi} : \mathrm{CH}^{\cdot}_{\mathrm{num}}(X)_{\mathbf{Q}} \to \overline{\mathrm{A}_*(R)_{\mathbf{Q}}}$ がある。

$$
\begin{array}{ccc}
\mathrm{CH}^{\cdot}(X)_{\mathbf{Q}} & \xrightarrow{\xi} & \mathrm{A}_*(R)_{\mathbf{Q}} \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathrm{CH}^{\cdot}_{\mathrm{num}}(X)_{\mathbf{Q}} & \xrightarrow{\bar{\xi}} & \overline{\mathrm{A}_*(R)_{\mathbf{Q}}}
\end{array}
$$

このとき、自然な全射 $M \to \overline{\mathrm{A}_*(R)_{\mathbf{Q}}}$ が誘導される。今、$\dim \mathrm{CH}^{\cdot}_{\mathrm{num}}(X)_{\mathbf{Q}} < \infty$ であることにより $\dim L = \dim M$ が成立する。定理 2.4 により $\dim W = \dim \overline{\mathrm{A}_*(R)_{\mathbf{Q}}}$ であるので、

$$
\begin{array}{ccc}
\dim W & \leq & \dim L \\
\| & & \| \\
\dim \overline{\mathrm{A}_*(R)_{\mathbf{Q}}} & \leq & \dim M
\end{array}
$$

が成立する。よって、次の三条件は同値であることがわかる。

a) $W = L$、
b) 自然な射 $K \to L$ は全射である、
c) 自然な射 $\mathrm{CH}^{\cdot}_{\mathrm{num}}(X)_{\mathbf{Q}}/h \cdot \mathrm{CH}^{\cdot}_{\mathrm{num}}(X)_{\mathbf{Q}} \to \overline{\mathrm{A}_*(R)_{\mathbf{Q}}}$ は同型である。

このことから、直ちに次の定理がわかる。

定理 4.1 自然な射 $\mathrm{CH}^{\cdot}(X)_{\mathbf{Q}} \to \mathrm{CH}^{\cdot}_{\mathrm{num}}(X)_{\mathbf{Q}}$ が同型であるとき、$\mathrm{A}_*(R)_{\mathbf{Q}} \to \overline{\mathrm{A}_*(R)_{\mathbf{Q}}}$ も同型である。

Roberts-Srinivas [9] では、次のことが示されている。

1) $k = \mathbb{C}$ とする。このとき、$W \neq L$ なる例がある。

2) $k = \overline{\mathbb{Q}}$ または $\overline{\mathbb{F}_p}$ としよう。もし、スタンダード予想などの予想が正しければ、$W = L$ が成立する。

注意 4.2 $\mathbb{C}$ 上のスムーズな射影多様体 X のある斉次座標環 A の斉次極大イデアルでの局所化を R としよう。ここで、自然な射

$$
\mathrm{CH}^{\cdot}_{\mathrm{hom}}(X)_{\mathbf{Q}} \longrightarrow \mathrm{CH}^{\cdot}_{\mathrm{num}}(X)_{\mathbf{Q}} \tag{8}
$$

は同型であると仮定しよう。ただし、$\mathrm{CH}^{\cdot}_{\mathrm{hom}}(X)_{\mathbf{Q}}$ は、*homological* 同値で割った有理係数のチャウ環 *([1] の Chapter 19 を見よ)* とする。この仮定の下で、「$j \leq \dim R/2$ に対し

て、$\overline{\mathrm{A}_j(R)_{\mathbb{Q}}} = 0$」であることが証明できる。このことを環論の言葉に翻訳すると、「任意の $\mathbb{F}. \in C^{\mathrm{m}}(R)$ と $\dim M \le \dim R/2$ を満たす任意の $M \in \mathcal{M}(R)$ に対して、

$$\sum_{n \in \mathbf{Z}} (-1)^n \ell_R(\mathrm{H}_n(\mathbb{F}. \otimes_R M)) = 0$$

が成立する」となる。

上の写像 *(8)* は、次のどれかが満たされれば同型になる *([1] の Example 19.3.2 を見よ)*。*(i)* $\dim X \le 3$. *(ii)* X はアーベル多様体, *(iii)* スタンダード予想が正しい。

参考文献

[1] W. FULTON, *Intersection Theory, 2nd Edition*, Springer-Verlag, Berlin, New York, 1997.

[2] H. GILLET AND C. SOULÉ, *Intersection theory using Adams operation*, Invent. Math. **90** (1987), 243–277.

[3] H. HIRONAKA, *Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero*, Ann. Math. **79** (1964), 109–326.

[4] A. J. DE JONG, *Smoothness, semi-stability and alterations*, Publ. Math. IHES **83** (1996), 51–93.

[5] K. KURANO, *A remark on the Riemann-Roch formula for affine schemes associated with Noetherian local rings*, Tohoku Math. J. **48** (1996), 121–138.

[6] K. KURANO, *Numerical equivalence defined on Chow groups of Noetherian local rings*, preprint (`http://www.math.meiji.ac.jp/~kurano/`).

[7] K. KURANO AND P. C. ROBERTS, *Adams operations, localized Chern characters, and the positivity of Dutta multiplicity in characteristic 0*, Trans. Amer. Math. Soc. **352** (2000), 3103–3116.

[8] P. C. ROBERTS, *MacRae invariant and the first local chern character*, Trans. Amer. Math. Soc., **300** (1987), 583–591.

[9] P. C. ROBERTS AND V. SRINIVAS, *Modules of finite length and finite projective dimension*, to appear in Invent. Math., **151** (2003), 1–27.

[10] J.-P. SERRE, *Algèbre locale, Multiplicités*, Lecture Notes in Math. 11, Springer-Verlag, Berlin, New York, 1965.

[11] R. W. THOMASON AND T. TROBAUGH, *Higher algebraic K-theory of schemes and of derived categories.* "The Grothendieck Festschrift", Vol. III, 247–435, Progr. Math., 88, Birkhauser Boston, Boston, MA, 1990.

明治大学理工学部数学科

214-8571 川崎市多摩区東三田 1-1-1

`kurano@math.meiji.ac.jp`

`http://www.math.meiji.ac.jp/~kurano`